doi:10.11959/j.issn.1000-436x.2016242

基于集对信息粒空间的三支决策模型及应用

张春英[1,2]，王立亚[1,2]，李明霞[1,2]，刘保相[1,2]
（1. 华北理工大学理学院，河北 唐山 063009；2. 河北省数据科学与应用重点实验室，河北 唐山 063009）

摘　要：通过对现有三支决策理论和方法的分析，提出基于集对信息粒空间的三支决策模型，以及从对立统一的集对论观点，对三支决策的内涵和外延加以诠释。首先，分析集对信息粒空间的结构，分为正同粒、负反粒和差异；其次，将集对信息粒按照所设定的阈值划分为 3 个互不相交的正同域、负反域和差异域，并基于这 3 个域给出决策损失函数的计算方法，给出决策算法流程；最后在风险投资评估中运用集对信息粒空间上的三支决策方法对风险投资进行评估决策，取得了较好的决策效果。
关键词：集对粒空间；广义三支决策；狭义三支决策；集对关联
中图分类号：TP391　　　　**文献标识码**：A

Model of three-way decision based on the space of set pair information granule and its application

ZHANG Chun-ying[1,2], WANG Li-ya[1,2], LI Ming-xia[1,2], LIU Bao-xiang[1,2]
(1. College of Science, North China University of Science and Technology, Tangshan 063009, China;
2. Key Laboratory of Data Science and Application of Hebei Province, Tangshan 063009, China)

Abstract: Through the analysis of the existing theory and method of three-way decision, model of three-way decision based on the space of set pair information granule was proposed, which was to explain the intension and extension of three-way decision on the view of unity of opposites. Firstly the space structure of set pair information granule can be divided into positive granule, negative granule, different granule, which were similar and slightly different with three regions of generalized three-way decision. The three kinds of information granules in set pair information granule space were built based on certain positive degree, negative degree and different degree. Secondly, according to the given threshold, set pair information granule is divided into mutually disjointing positive region, negative region and different region. Based on these three regions, the computing method of decision loss function is put forward, and the process of decision-making algorithm is obtained use the three-way decision method of set pair information granule space to evaluate and make decision on risk investment, then good decision results have been achieved.
Key words: set pair granule space, generalized three-way decision, narrow three-way decision, set pair association

1　引言

三支决策[1,2]是近几年发展起来的一种处理不确定性决策的粒计算方法，是从决策粗糙集理论逐渐演变成的一种符合人类认知的“三分而治”模型。三支决策的核心思想是将一个统一集划分为 3 个不相交的成对区域，对每一个区域来制定相应的决策策略。针对三支决策的规则问题，国内外学者提出了一系列基于概率粗糙集的模型,如决策粗糙集模型[3]、区间决策粗糙集模型[4]、模糊数决策粗糙集[5]

收稿日期：2016-08-29
通信作者：王立亚，wang_liya@126.com
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61370168, No.61472340）；河北省自然科学基金资助项目（No.F2016209344）；华北理工大学青年科学研究基金资助项目（No.Z201517）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61370168, No.61472340), The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.F2016209344), The Science Foundation for Young Scientists of North China University of Science and Technology (No.Z201517)

等。概率粗糙集模型将具有较高正确可能性的等价类划入正域，不满足较低划分阈值的等价类划入负域，介于二者之间的等价类则划入边界域，所以概率粗糙集模型具有较高的容错能力。对于划入边界区域的对象，文献[6]构建了基于构造性覆盖算法的三支决策模型，并对落入边界域样本提出了 2 种进一步的决策方案。三支决策的思想已潜移默化地融入在人们生活的方方面面，为粒计算方法与决策分析的融合建立起一座桥梁。三支决策对于处理那些不确定信息具有一定的实用性，尤其对目前信息量不够充分，针对那些目前知识体系下难以决策的对象，可以在已有的知识体系下给出博弈后的一个二支决策结果，也可以等待新信息以帮助进一步决策，这正是三支决策思想的反映。

从宏观和微观 2 种视觉出发，三支决策分为广义三支决策和狭义三支决策。Yao[7~9]提出一种三分而治的广义三支决策思想，如图 1 所示。在图 1 中，将论域分为 3 个区域：区域 I、区域 II 和区域 III，每个区域对应一种策略。对于区域 I 的事件执行策略 I；对于区域 II 的事件执行策略 II；对于区域 III 的事件执行策略 III。图 1 中 3 种策略并不要求具有偏好关系，它们只要能满足为 3 种不同策略即可。假设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是有限非空的对象集，C 为有限条件集。3 部分区域分别称为 R_1—域、R_2—域和 R_3—域，简记为 R_1、R_2 和 R_3。

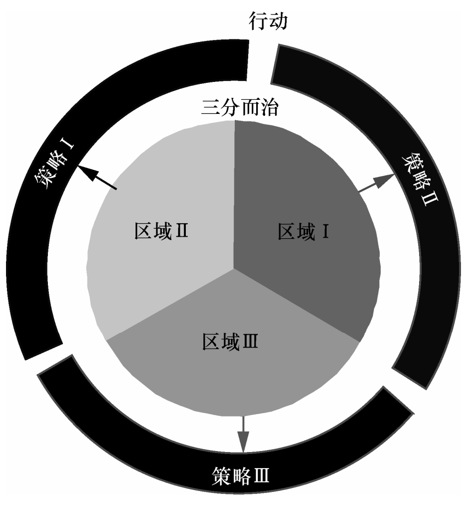


图 1 三分而治的广义三支决策示例

Yao 在文献[8, 9]中，给出了一系列广义三支决策模型，如基于区间集、模糊集、粗糙集、阴影集偏序集等的三支决策，分别从不同的模型中诠释了三支决策概念的内涵和外延。此外，广义三支决策模型还包括三支空间、三支计算、三支认知、三支分类、三支分析、三支聚类、三支推荐、三支逻辑等方面[10~12]，它们通过不同的理论、方法和应用对三支决策做出不同的内涵和外延的诠释，为三支决策与粒计算的融合提供了诸多有益的思路。

由于主客观条件的限制，认识只能停留在某一层次上，它不可避免地具有不彻底性和不完全性。当信息分类后，通常相对于确定性信息的提取和分离，必然遗留下未知的或者认识和描述所不及的一部分不确定性信息，暂时成为认识在现实水平上的认知盲区。这是主体认识的又一种相对性，它反映了主体与客体间的本质矛盾。集对论[13, 14]在承认这种矛盾的客观存在的基础上，通过关联度对事物进行对立刻画，较好地实现了不确定性信息处理的辩证思维与数学方法的有机结合，其核心思想是把确定-不确定视为一个完整系统，辩证认识和整体刻画系统中所蕴含着的对立统一关系，实现对信息的完整有效的分类与处理。而集对信息粒[15]是运用集对思想在问题空间上进行对立分类与定量刻画，形成集对信息生成空间，并进一步按照评价函数划分为确定信息粒和不确定信息粒，其中，确定信息粒分为正同信息粒和负反信息粒，由这 3 种信息粒构成集对信息粒空间。在进行决策时，往往要综合考虑决策的正、负和不确定收益，并非单纯考虑某一方面，集对信息粒空间则是一个综合考虑正同度、负反度和差异度的对立统一的信息空间。

本文在集对信息粒空间上构建三支决策模型，拟从对立统一的集对论观点，对三支决策的内涵和外延加以诠释。

2 三支决策

广义三支决策思想来源于人们的实际生活，其中最典型的代表就是中国儒家的传统思想，中庸之道。中国有很多典故来描述三支决策的思想，如不上不下，不前不后、不左不右、不大不小、不长不短等。

定义 1[8] 基于条件集 C，三支决策通过一个映射将对象集 U 分为 3 个两两互不相交的 R_1—域、R_2—域和 R_3—域，即

$$f:U\to\{R_1,R_2,R_3\} \tag{1}$$

其中，$R_1,R_2,R_3\subseteq U$，$R_1\cup R_2\cup R_3=U$；$R_1\cap R_2=\varnothing$，$R_2\cap R_3=\varnothing$，$R_1\cap R_3=\varnothing$。对于 3 个区域，其补集

的构造如下

$$\begin{cases} R_1^C = R_2 \cup R_3 \\ R_2^C = R_1 \cup R_3 \\ R_3^C = R_1 \cup R_2 \end{cases} \tag{2}$$

特别地，R_1、R_2、R_3 可能为空集。若 3 个区域有当且仅当一个区域为空集时，三支决策转化为二支决策问题。

相对于广义三支决策问题，狭义三支决策模型着重探讨三支决策在实际决策过程中语义问题[16]。对于图 1 中的"三分而治"模型，区域Ⅰ、区域Ⅱ和区域Ⅲ有了具体的含义，如粗糙集理论中的正域、边界域和负域；3 种策略也赋予了实际的语义解释，如接受、进一步观察和拒绝。图 2 给出了一种基于粗糙集理论的狭义三支决策模型。

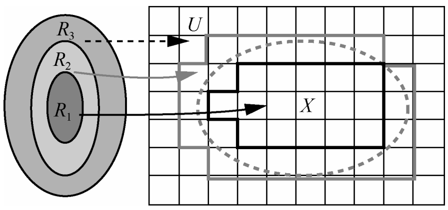


图 2　基于粗糙集理论的狭义三支决策模型

在图 2 中，上下近似将论域分为 3 部分，正域 $R_1 = POS(X)$，边界域 $R_2 = BND(X)$，负域 $R_3 = NEG(X)$。基于上述思想，本文可以重新改写定义 1，使之满足狭义三支决策的条件。

定义 2[16]　基于条件集 ，三支决策通过一个映射将对象集 U 分为 3 个两两互不相交的 L—域、M—域和 R—域，即

$$f: U \to \{L, M, R\} \tag{3}$$

其中，$L,M,R \subseteq U$，$L \cup M \cup R = U$；$L \cap M = \varnothing$，$M \cap R = \varnothing, L \cap R = \varnothing$。对于 3 个区域，其补集的构造如下。

$$\begin{cases} L^C = M \cup R \\ M^C = L \cup R \\ R^C = L \cup M \end{cases} \tag{4}$$

在这里，L—域、M—域和 R—域有一定的偏好关系。比如在粗糙集中，L—域表示负域、M—域表示边界域，R—域表示正域。特别地，若边界域 M 为空集，则粗糙集转化为经典集，三支决策也转化为二支决策。

3　集对信息粒空间

设有问题空间 $W = (U, A, R)$，其中，U 为对象空间, A 为对象的属性空间, V 为 U 关于 A 值域空间。取 $A_0 \subseteq A$，$V_0 \subseteq V$ 形成问题 W 的子空间 $W_0 = (U_0, V_0, R_0)$，简称子问题。

由 W 按照某原理 p 对 U 进行信息分类，得 $W' = (U_0, R_p)$，称为基于 p 的问题 W 的分类生成空间，简称关于 W 的生成空间。其中，R_p 称为关于 U 的生成模式或生成类（族）。

显然,在关系上有 $W_0 \subseteq W$，根据 W_0 与 W 的关系，可将问题 W_0 的不确定性做不同的分类。

所谓集对，指在问题中具有一定联系的集合对子。根据成对原理，问题中的集合作为相对独立的分类单元也是以联系为基础成对出现的。一般地，集合是由具有某种同一属性的对象所构成的系统的基本分类单元，而集对所呈现的二元关系上系统的最基本关系。

以问题空间 W_0 为客体，按照集对思想进行对立分类与定量刻画，形成了集对信息生成空间[11]。

定义 3　设 $W = (U, A, R)$, $W_0 = (U_0, V_0, R_0)$，$R \subseteq A_0$，定义 W 上一对子集 $X^c = \{X_1^c, X_2^c, \cdots, X_m^c\}$，$X^u = \{X_1^u, X_2^u, \cdots, X_n^u\}$ 分别为确定信息粒和不确定信息粒。则对于信息 $x \in W_0$ 存在一对映射

$$\tau X^c : W_0 \to [0,1]$$

$$x \to \tau X^c(x) = a_R + c_R$$

和

$$\tau X^u : W_0 \to [0,1]$$

$$x \to \tau X^u(x) = b_R$$

分别称为 x 关于 X^c、X^u 的确定度和不确定度，X^c、X^u 分别称为确定粒和不确定粒（差异粒）。记 $M = (X^c, X^u) = \{(\tau X^c(x), x), (\tau X^u(x), x) | x \in W_0\}$，构成基于集对论的 W_0 的一对信息分配，称为关于 W_0 的确定—不确定集对信息粒集。

定义 4　基于确定信息粒 X^c，$R \subseteq A_0$，X^c 上一对子集 $X^{c_s} = \{X_1^{c_s}, X_2^{c_s}, \cdots, X_k^{c_s}\}$，$X^{c_o} = \{X_1^{c_o}, X_2^{c_o}, \cdots, X_l^{c_o}\}$ 为正同信息粒和负反信息粒，则对于信息 $x \in X^c$，存在一对映射。

$$\tau X^{c_s} : X^c \to [0,1]$$

$$x \to \tau X^{c_s}(x) = a_R$$

和

$$\tau X^{c_o}: X^c \to [0,1]$$

$$x \to \tau X^{c_o}(x) = c_R$$

分别称为 x 关于 X^{c_s} 、 X^{c_o} 的正同度和负反度， X^{c_s} 、 X^{c_o} 分别称为正同粒和负反粒。记 $N=(X^{c_s},\ X^{c_o})=\{(\tau X^{c_s}(x),x),(\tau X^{c_o}(x),x) \mid x\in X^c\}$，构成基于集对论的 X^c 的一对信息分配，称为关于 X^c 的正同—负反集对信息粒集。

定义 5 $W=(U,A,R), W_0=(U_0,V_0,R_0)$，$R\subseteq A_0$ 则按定义1和定义2，形成集对 (W_0,R)，归结为一个完整的集对关联度。

$$(W_0,R)=a_R+b_R i+c_R j \tag{5}$$

其中， $i\in[-1,1], j=-1$ 分别称为差异度和负反度标记符号或相应系数，用以标识分类信息的方向和不确定程度。

定义 6 $W=(U,A,R), W_0=(U_0,V_0,R_0)$，$R\subseteq A_0$ 记： $W'=(U,X^c,X^u)$ 或 $W'=(U,X^{c_s},X^{c_o},X^u)$， 称为 W_0 关于关系 R 的集对信息粒生成空间，简称集对粒空间。

由于 W_0 为 W 的近似空间，则关于 W 、 W_0 上的对立分类刻画应满足 $a_R+b_R+c_R<1$，表现出信息分配处理的不完备性。对于已获取的信息 W_0，按照信息完整性原理，这种刻画一般应满足归一化条件 $\tau X^c(x)+\tau X^u(x)=a_R+b_R+c_R=1$，即关于 W_0 的分类描述应是完整的。同时，由于不确定信息的客观存在，一般有 $\tau X^c(x)=\tau X^{c_s}(x)+\tau X^{c_o}(x)=a_R+c_R<1$ 。

集对论从事物内部对立双方分类刻画入手，保证了刻画的对称性和完整性，体现了确定—不确定系统分析中的对立统一。

性质 1 设 $W'=(U,X^c,X^u)$ 或 $W'=(U,X^{c_s},X^{c_o},X^u)$，则有

1) $X^{c_s}\cup X^{c_0}\cup X^u=U$

2) $X^{c_s}\cup X^{c_0}=X^c$

性质 2 当 $X^U=\Phi$ 时， $W'=(U,X^{c_s},X^{c_0})$，集对信息粒生成空间退化为确定性信息空间，且满足 $a_R+c_R=1$ 。

性质 3 当 $b_R=0$ 时，集对粒仅由确定粒组成，按照 R 将问题分成不同的子集。

性质 4 当 $b_R=0, c_R=0$，集对粒仅由正同粒构成，即仅考虑问题本身，而不考虑其对立面及其他可能面。

性质 5 当 $a_R=0, c_R=0$，集对粒仅由不确定粒（差异粒）构成，加上不确定度，可形成模糊信息粒。

性质 6 若将 R 看作等价类，则根据其对 U 的划分，可得 $X^{c_s}\cup X^U$ 即对应 x 的粗糙集的上近似，而 X^{c_s} 是 x 的粗糙集的下近似。

由此可知,集对粒是现有粒计算方法的融合拓展，是经典集、模糊集、粗糙集的综合推广，对集对粒空间的研究可极大地拓展与完善现有粒计算理论方法。

4 集对信息粒空间上的三支决策

4.1 3个域的划分

定义 7 设有问题空间 $W=(U,A,R)$， $\breve{R}$ 表示 U 上的一个二元关系，构成集对 $(W,\breve{R})$，在 $\breve{R}$ 下 U 上的元素之间形成的集对关联矩阵用 $\boldsymbol{\rho}(W,\breve{R})$ 来表示。

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}i+c_{11}j & a_{12}+b_{12}i+c_{12}j & \cdots & a_{1n}+b_{1n}i+c_{1n}j \\ a_{21}+b_{21}i+c_{21}j & a_{22}+b_{22}i+c_{22}j & \cdots & a_{2n}+b_{2n}i+c_{2n}j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1}i+c_{n1}j & a_{n2}+b_{n2}i+c_{n2}j & \cdots & a_{nn}+b_{nn}i+c_{nn}j \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中， $a_{kl},b_{kl},c_{kl}\in[0,1]$，分别表示 x_k 和 x_l 之间的正同度、差异度和负反度。且满足 $a_{kl}+b_{kl}+c_{kl}=1$ 。

对于问题空间 $W=(U,A,R)$， 二元关系 $\breve{R}$ 可以诱导出一个集对信息粒族集，称为 $(W,\breve{R})$ 的集对粒空间，具体可表示为

$$K(W,\breve{R})=(W'_{\breve{R}}(x_1),W'_{\breve{R}}(x_2),\cdots,W'_{\breve{R}}(x_n))$$

其中， $W'_{\breve{R}}(x_k)=\dfrac{a_{k1}+b_{k1}i+c_{k1}j}{x_1}+\dfrac{a_{k2}+b_{k2}i+c_{k2}j}{x_2}+\cdots+\dfrac{a_{kn}+b_{kn}i+c_{kn}j}{x_n}$ 是 x_i 在关系 $\breve{R}$ 下诱导的集对信息粒。且 $W'_{\breve{R}}(x_k)=(U,x_k^{c_s},x_k^{c_0},x_k^u)$， $x_k^{c_s}$ 为 x_k 由关系 $\breve{R}$ 诱导的正同粒集合, $x_k^{c_0}$ 为 x_k 由关系 $\breve{R}$ 诱导的负反粒, x_k^u 为 x_k 由关系 $\breve{R}$ 诱导的差异粒。 $a_{kl}+b_{kl}i+c_{kl}j$ 表示 x_k 与 x_l 的集对关联度。“+”表示元素的并。

集对信息粒 $W'_{\breve{R}}(x_k)$ 的信息粒度计算如下

$$|W'_{\breve{R}}(x_k)|=\frac{1}{n}\left(\sum\nolimits_{l=1}^{n}a_{kl}+\sum\nolimits_{l=1}^{n}b_{kl}i+\sum\nolimits_{l=1}^{n}c_{kl}j\right) \\ =a_{\breve{R}k}+b_{\breve{R}k}i+c_{\breve{R}k}j \tag{7}$$

其中， $i\in[-1,1], j=-1$ 。称 $a_{\breve{R}k}$ 为集对信息粒 $W'_{\breve{R}}(x_k)$ 的正同粒度， $b_{\breve{R}k}$ 为集对信息粒 $W'_{\breve{R}}(x_k)$ 的差异粒度，

c_{Rk} 为集对信息粒 $W'_{\breve{R}}(x_k)$ 的负反粒度。

在集对信息粒空间中，若要进行决策，并非正同粒上的对象都采取接受决策，也并非负反粒上的对象都采取拒绝决策，这和该对象的正同度和异反度有关，也与具体的问题有关。正同度小的信息粒很可能会被拒绝，同样，负反度小的信息粒也可能会被接受。因此，在集对粒空间上划分决策域需根据具体问题设置阈值，将每个对象的正同度、异反度与阈值进行比较，符合条件的对象再相应地划入正同域、负反域，剩下的信息粒再划入差异粒。为此，给出如下定义。

定义 8　设有问题空间 $W=(U,A,R)$，$\breve{R}$ 表示 U 上的一个二元关系，x_k 在关系 $\breve{R}$ 下诱导的集对信息粒 $W'_{\breve{R}}(x_k)=(U,x_k^{c_s},x_k^{c_0},x_k^{u})$，$x_k^{c_s}$ 为 x_k 由关系 $\breve{R}$ 诱导的正同粒，$x_k^{c_0}$ 为 x_k 由关系 $\breve{R}$ 诱导的负反粒，x_k^{u} 为 x_k 由关系 $\breve{R}$ 诱导的差异粒。设定正同度阈值与负反度阈值分别为 λ 和 γ，则根据正同粒 $x_k^{c_s}$、负反粒 $x_k^{c_0}$ 和差异粒 x_k^{u} 可构成3个两两互不相交的 S—域、O—域和 D—域，即

$$S=\{x_i\mid a_{ki}\geqslant\lambda\}$$

$$O=\{x_i\mid c_{ki}\geqslant\gamma,a_{ki}<\lambda\}$$

$$D=U-S-O$$

其中，$S,O,D\subseteq U$，$U=S\bigcup O\bigcup D$；$S\bigcap O=\varnothing$，$O\bigcap D=\varnothing$，$S\bigcap D=\varnothing$。对于这 3 个域，其补集的构造如下。

$$S^C=O\bigcup D$$

$$O^C=S\bigcup D$$

$$U_C{}^C=S\bigcup O$$

在这里，S—域、O—域和 D—域有一定的偏好关系。即在集对信息粒空间中，O—域表示负反粒、D—域表示差异粒，S—域表示正同粒。特别地，若差异粒 D 为空集，则集对信息粒集转化为经典集，三支决策也转化为二支决策。

定义 9　设由问题空间 W、对象 x_k 与关系 $\breve{R}$ 得到的集对信息粒决定 x_k 的 S—域，若 $I=\{x_i\mid x_i\in S,$ $a_{ki}=\max\{\forall x_j\in S与x_k的正同度\}\}$，其中，$a_{ki}$ 表示 x_k 与 x_i 的正同度，则 I 称为域—最大正同类，称为 S 域—最大正同度，记作 BPD。

定义 10　设由问题空间 W、对象 x_k 与关系 $\breve{R}$ 得到的集对信息粒决定 x_k 的 O—域，若

$$D=\{x_i\mid x_i\in O\},c_{ki}=\max\{\forall x_j\in O与x_k的负反度\}$$

其中，b_{ki} 表示 x_i 与 x_k 的负反度，则 D 称为 O—域最大负反类，$\forall x_i\in D$ 称为 O 域—最大负反，b_{ki} 称为 O 域-最大负反度 BND。

4.2　决策损失函数

设状态集 $ST=\{X,\bar{X}\}$，分别表示在形式背景的对象论域 U 中包含决策属性 d 的对象集合 X 和不包含 d 的对象集合 $\bar{X}$；由集对思想反映的是对象与其他对象的统一对立关系。所以由集对信息粒得到的三支决策并不是简单的由划分的 3 个域得到的，而是要综合考虑域中的统一对立关系，即由 S—域和 O—域均有可能得出接受决策或拒绝决策。行动集 $B=\{a_{P-S},a_{N-S},a_{P-O},a_{N-O},a_B\}$，分别表示 S—域接受某事件、S—域拒绝某事件、O—域接受某事件、O—域拒绝某事件和延迟某事件 5 种决策行动。

决策代价矩阵如表 1 所示，$\lambda_{\rm PP}$、$\lambda_{\rm BP}$、$\lambda_{\rm NP}$ 表示当真实属于 X 时，分别做出接受、拒绝、延迟决策所对应的损失函数值；$\lambda_{\rm PN}$、$\lambda_{\rm BN}$、$\lambda_{\rm NN}$ 表示当 x 真实属于 $\bar{X}$ 时，分别做出接受、拒绝、延迟决策所对应的损失代价函数值。

表 1　决策代价矩阵

决策动作	实体的客观状态	
	属于	不属于
接受决策	$\lambda_{\rm PP}$	$\lambda_{\rm PN}$
延迟决策	$\lambda_{\rm BP}$	$\lambda_{\rm BN}$
拒绝决策	$\lambda_{\rm NP}$	$\lambda_{\rm NN}$

采取 $a_{\rm P}$、$a_{\rm B}$、$a_{\rm N}$ 3 种决策行动下的期望损失函数分别表示为

$$R(a_{P-S})=\lambda_{\rm PP}\frac{|X\cap S|}{|S|}+\lambda_{\rm PN}\frac{|\bar{X}\cap S|}{|S|}$$

$$R(a_{N-S})=\lambda_{\rm NP}\frac{|X\cap S|}{|S|}+\lambda_{\rm NN}\frac{|\bar{X}\cap S|}{|S|}$$

$$R(a_{P-O})=\lambda_{\rm PP}\frac{|X\cap O|}{|O|}+\lambda_{\rm PN}\frac{|\bar{X}\cap O|}{|O|}$$

$$R(a_{N-O})=\lambda_{\rm NP}\frac{|X\cap O|}{|O|}+\lambda_{\rm NN}\frac{|\bar{X}\cap O|}{|O|}$$

$$R(a_B)=\lambda_{\rm BP}\frac{|X\cap U_C|}{|U_C|}+\lambda_{\rm BN}\frac{|\bar{X}\cap U_C|}{|U_C|}$$

4.3　集对信息粒上的三支决策思想

由集对信息粒可以划分出 3 个互不相交的 S—域、O—域和 D—域，然而，由集对信息粒得到的三支决策并不是简单的由这 3 个域划分得到的。由集对信息粒进行决策的过程分为划分域与做决策 2 个

阶段。在决策阶段，需要进行以下 3 种情况的讨论。

情况 1：域—最大正同度小于 O 域—最大负反度，即 $BPD < BND$ 根据 O 域—最大负反类 D 来决定 x_k 的决策属性，因为无论 O—域还是 D 中的对象都与 x_k 是负反关系，即它们的决策属性应为对立关系。

1) 若 D 中每个对象的决策属性值均相同，设 $x_i \in D$，则 x_k 的决策属性值应与 x_i 的相反。即若 x_i 的决策属性值为 0 或 1，则 x_k 的决策属性值应为 1 或 0；若 x_i 的决策属性值为不确定，则 x_k 的决策属性值也为不确定。

2) 若 D 中不是每个对象的决策属性值均相同，此时需要计算决策损失函数 $R(a_B)$、$R(a_{P-O})$ 和 $R(a_{N-O})$。

① 若 $R(a_{P-O})$=$R(a_{N-O})$ 或 $R(a_B)=\min\{R(a_B), R(a_{P-O}), R(a_{N-O})\}$，则 x_k 的决策属性值为不确定，即采取延迟决策 a_B。

② 若 $R(a_{P-O})=\min\{R(a_B), R(a_{P-O}), R(a_{N-O})\}$，则 x_k 的决策属性值为 1，即采取 O 域接受决策 a_{P-O}。

③ 若 $R(a_{N-O})=\min\{R(a_B), R(a_{P-O}), R(a_{N-O})\}$，则 x_k 的决策属性值为 0，即采取 O 域拒绝决策 a_{N-O}。

情况 2：S 域—最大正同度大于 O 域—最大负反度，即 $BPD > BND$。根据 S 域—最大正同类 I 来决定 x_k 的决策属性，因为无论 S 域还是 I 中的对象都与 x_k 是正同关系，即它们的决策属性应为统一关系。

1) 若 I 中每个对象的决策属性值均相同，设 $x_i \in I$，则 x_k 的决策属性值应与 x_i 的相同，即若 x_i 的决策属性值为 0 或 1，则 x_k 的决策属性值对应为 0 或 1，若 x_i 的决策属性值为不确定，则 x_k 的决策属性值也为不确定。

2) 若 I 中不是每个对象的决策属性值均相同，此时需要计算决策损失函数 $R(a_B)$、$R(a_{P-S})$ 和 $R(a_{N-S})$。

① 若 $R(a_{P-S})$=$R(a_{N-S})$ 或 $R(a_B)=\min\{R(a_B), R(a_{P-S}), R(a_{N-S})\}$，则 x_k 的决策属性值为不确定，即采取延迟决策 a_B。

② 若 $R(a_{P-S})=\min\{R(a_B), R(a_{P-S}), R(a_{N-S})\}$，则 x_k 的决策属性值为 1，即采取 S—域接受决策 a_{P-S}。

③ 若 $R(a_{N-S})=\min\{R(a_B), R(a_{P-S}), R(a_{N-S})\}$，则 x_k 的决策属性值为 0，即采取 S 域拒绝决策 a_{N-S}。

情况 3：S 域—最大正同度等于 O 域—最大负反度，即 $BPD = BND$。

1) 若 I 中每个对象的决策属性值均相同，D 中每个对象的决策属性值均相同且与 I 中对象决策属性为对立关系。设 $x_i \in I$，则 x_k 的决策属性值应与 x_i 的相同，将此时的决策也定义为 S 域决策，即为 S 域接受决策 a_{P-S} 或 S 域拒绝决策 a_{N-S}。

2) 除去 1)，其他情形均为 x_k 的决策属性值不确定，即采取延迟决策 a_B。

具体的集对信息粒上的三支决策流程如图 3 所示，其中，符号“≈”表示决策属性值不确定。

5 应用实例

在风险投资评估过程中，投资的风险来自于技术、市场、管理、环境等很多方面，最主要的有技术风险、市场风险和管理风险，而每个风险因素里面又包含了很多具体的评价指标。在对某风险投资项目 p 进行评价时，将风险因素分为如图 4 所示的 2 层评价体系，并请 5 位专家对每个指标进行打分，打分分为高风险(1)、低风险(0)与中等风险(−)3 种情况。以 technical risk U_1 为例，原始打分结果如表 2 所示，其中，e_i 表示第 i 个专家的打分情况，v 表示决策属性值，p_i 表示以往已经做出过决策的项目，“？”表示待评估的项目 p 的决策属性未知。

集对信息粒上的三支决策过程如下。

第一阶段：划分域

1) 构造集对信息粒。预投项目 p 与 $p_i(i$=1,⋯,8) 分别在 $u_{1i}(i$=1,2,3,4)的集对关联度如表 3 所示，进而可得到在关系 u_{11} 下的集对信息粒。

$$W'_{u_{11}}(p)=\frac{0.6+0i+0.4j}{p_1}+\frac{0.6+0.2i+0.2j)}{p_2}+\frac{0.2+0.4i+0.4j}{p_3}+\frac{0.2+0.4i+0.4j}{p_4}+\frac{0.4+0.4i+0.2j}{p_5}+\frac{0.4+0.4i+0.2j}{p_6}+\frac{0.4+0.2i+0.4j}{p_7}+\frac{0.4+0.2i+0.4j}{p_8}$$

$$W'_{u_{12}}(p)=\frac{0.2+0.6i+0.2j}{p_1}+\frac{0.2+0.4i+0.4j}{p_2}+\frac{0.4+0.2i+0.4j}{p_3}+\frac{0.2+0.6i+0.2j}{p_4}+\frac{0+0.4i+0.6j}{p_5}+\frac{0.4+0.2i+0.4j}{p_6}+\frac{0.2+0.6i+0.2j}{p_7}+\frac{0.8+0.2i+0j}{p_8}$$

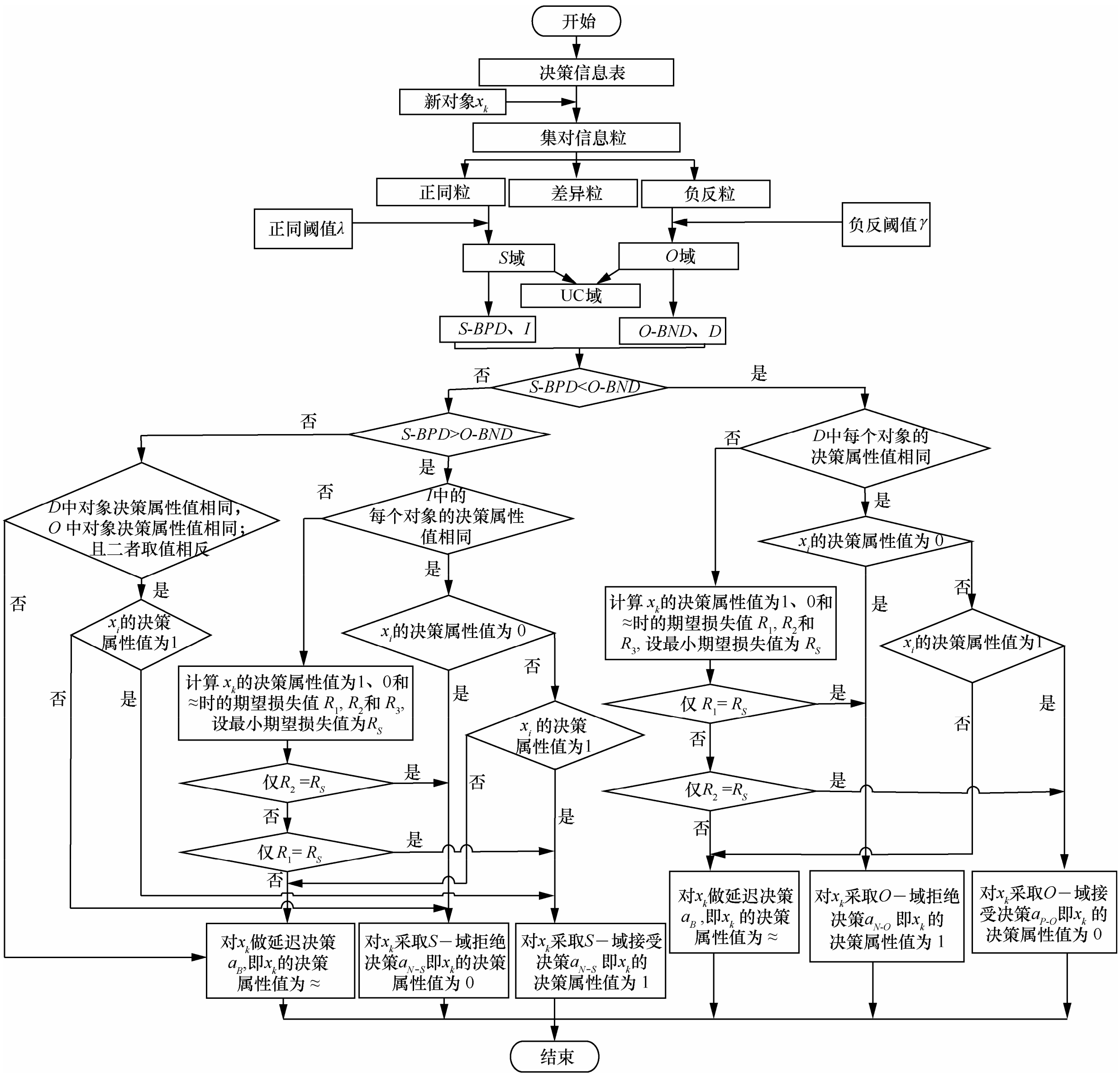


图 3　集对信息粒上的三支决策流程

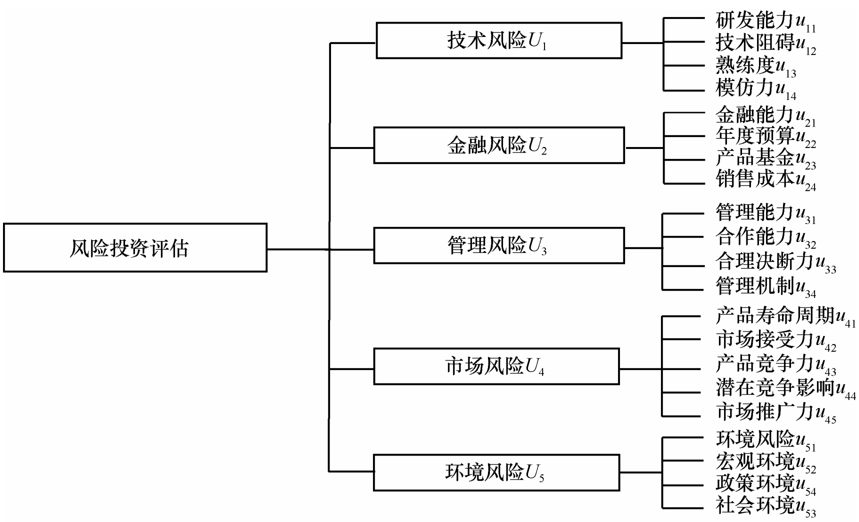


图 4　风险投资评价指标体系

表 2 专家对 U_1 的原始打分结果

指标	u_{11}						u_{12}						u_{13}						u_{14}					
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	v_{11}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	v_{12}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_1	v_{13}	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	v_{14}
p_1	1	0	1	−	1	1	0	−	0	−	1	0	0	1	−	1	1	1	1	−	−	1	1	1
p_2	1	1	0	1	0	0	−	1	1	1	0	1	1	−	1	0	1	1	−	−	1	0	1	1
p_3	0	1	−	0	1	0	1	0	−	1	1	1	0	1	0	−	0	0	1	−	0	−	0	0
p_4	−	0	0	−	1	0	1	0	0	−	0	0	1	1	−	1	−	1	−	−	−	1	−	1
p_5	1	−	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	−	0	0	0	1	1	−	0	0	1
p_6	−	1	1	0	1	1	1	1	−	0	1	1	1	0	1	−	1	1	−	1	1	−	1	1
p_7	0	1	1	1	1	1	1	0	1	−	1	1	0	1	0	−	0	0	1	−	1	−	1	1
p_8	1	0	−	−	0	0	0	0	−	0	1	0	1	1	1	−	1	1	−	−	1	−	1	1
p	1	1	1	−	0	?	0	0	−	0	−	?	−	1	0	1	−	?	−	−	0	1	−	?

表 3 u_{1i} 下 p 和 p_i 的集对关联度计算结果

p_n	u_{11} 下的集对关联度	u_{12} 下的集对关联度	u_{13} 下的集对关联度	u_{14} 下的集对关联度
p_1	$0.6+0i+0.4j$	$0.2+0.6i+0.2j$	$0.4+0.6i+0j$	$0.4+0.6i+0j$
p_2	$0.6+0.2i+0.2j$	$0+0.6i+0.4j$	$0+0.6i+0.4j$	$0.4+0.2i+0.4j$
p_3	$0.2+0.4i+0.4j$	$0.4+0.2i+0.4j$	$0.4+0.6i+0j$	$0.4+0.6i+0j$
p_4	$0.2+0.4i+0.4j$	$0.2+0.6i+0.2j$	$0.6+0.4i+0j$	$0.8+0.2i+0j$
p_5	$0.4+0.4i+0.2j$	$0+0.4i+0.6j$	$0+0.6i+0.4j$	$0+0.8i+0.2j$
p_6	$0.4+0.4i+0.2j$	$0.4+0.2i+0.4j$	$0+0.6i+0.4j$	$0.2+0.6i+0.2j$
p_7	$0.4+0.2i+0.4j$	$0.2+0.6i+0.2j$	$0.4+0.6i+0j$	$0.2+0.6i+0.2j$
p_8	$0.4+0.2i+0.4j$	$0.8+0.2i+0j$	$0.2+0.6i+0.2j$	$0.4+0.4i+0.2j$

$$W'_{u_{13}}(p)=\frac{0.4+0.6i+0j}{p_1}+\frac{0+0.6i+0.4j}{p_2}+\frac{0.4+0.6i+0j}{p_3}+\frac{0.6+0.4i+0j}{p_4}+\frac{0+0.6i+0.4j}{p_5}+\frac{0+0.6i+0.4j}{p_6}+\frac{0.4+0.6i+0j}{p_7}+\frac{0.2+0.6i+0.2j}{p_8}$$

$$W'_{u_{14}}(p)=\frac{0.4+0.6i+0j}{p_1}+\frac{0.4+0.2\mathrm{i}+0.4j}{p_2}+\frac{0.4+0.6i+0j}{p_3}+\frac{0.8+0.2i+0j}{p_4}+\frac{0+0.8i+0.2j}{p_5}+\frac{0.2+0.6i+0.2j}{p_6}+\frac{0.2+0.6i+0.2j}{p_7}+\frac{0.4+0.4i+0.2j}{p_8}$$

2) 划分域

设定正同度阈值与负反度阈值分别为 $\lambda=0.5$ 和 $\gamma=0.4$，则由 $W'_{u_{11}}(p)$ 得到的 3 个域分别为 $S_{u_{11}}=\{p_1,p_2\}$、$O_{u_{11}}=\{p_3,p_4,p_7,p_8\}$ 和 $U_{Cu_{11}}=\{p_5,p_6\}$，由 $W'_{u_{12}}(p)$ 得到的 3 个域分别为 $S_{u_{12}}=\{p_8\}$、$O_{u_{12}}=\{p_2,p_3,p_5,p_6\}$ 和 $U_{Cu_{12}}=\{p_1,p_4,p_7\}$，由 $W'_{u_{13}}(p)$ 得到的 3 个域分别为 $S_{u_{13}}=\{p_4\}$ 和 $O_{u_{13}}=\{p_2,p_5,p_6\}$ 和

$U_{Cu_{13}}=\{p_1,p_3,p_7,p_8\}$，由 $W'_{u_{14}}(p)$ 得到的 3 个域分别为 $S_{u_{14}}=\{p_4\}$、 $O_{u_{14}}=\{p_2\}$ 和 $U_{Cu_{14}}=\{p_1,p_3,p_5,p_6,p_7,p_8\}$。

第二阶段：决策过程。其中，决策代价矩阵如表 4 所示。

表 4　　决策代价矩阵

决策动作	实体的客观状态	
	属于 X	不属于 X
接受决策	0	17
延迟决策	9	2
拒绝决策	15	0

1) 计算 S 域—最大正同度 BDP 与 O 域-最大负反度 BND

由表 2 及集对信息粒 $W'_{u_{1i}}(p)$ 可得到对应的 S 域—最大正同度分别为 $BDP_{u_{11}}=0.6$、$BDP_{u_{12}}=0.8$、$BDP_{u_{13}}=0.6$、$BDP_{u_{14}}=0.8$，S 域—最大正同度类分别为 $I_{u_{11}}=\{p_1,p_2\}$、$I_{u_{12}}=\{p_8\}$、$I_{u_{13}}=\{p_4\}$、$I_{u_{14}}=\{p_4\}$。

由表 2 及集对信息粒 $W'_{u_{1i}}(p)$ 可得到对应的 O 域—最大负反度分别为 $BND_{u_{11}}=0.4$、$BND_{u_{12}}=0.6$、$BND_{u_{13}}=0.4$、 $BND_{u_{14}}=0.4$，O 域—最大负反类分别为 $D_{u_{11}}=\{p_3,p_4,p_7,p_8\}$、$D_{u_{12}}=\{p_5\}$、$D_{u_{13}}=\{p_2,p_5,p_6\}$、$D_{u_{14}}=\{p_4\}$。

2) 决策

① u_{11} 下， $BDP_{u_{11}}=0.6>BND_{u_{11}}=0.4$，$I_{u_{11}}$ 中的 2 个对象决策属性值分别为 1，0，且决策损失函数 $R(a_{P-S})=R(a_{N-S})=0$，则得到 p 决策属性值为−，做出 a_B 决策，即项目 p 的决策动作为延迟。

② u_{12} 下， $BDP_{u_{12}}=0.8>BND_{u_{12}}=0.6$，且 $I_{u_{12}}$ 中只有一个对象 p_8，其决策属性值为 0，则根据正同关系，得到 p 决策属性值为 0，做出 a_{N-S} 决策，拒绝项目为 technical impediment 高风险项目，即其为 technical impediment 低风险项目。

③ u_{13} 下， $BDP_{u_{13}}=0.6>BND_{u_{13}}=0.4$，且 $I_{u_{13}}$ 中只有一个对象，其决策属性值为 1，则根据正同关系，得到 p 决策属性值为 1，做出 a_{P-S} 决策，接受项目 p 为 maturity 高风险项目。

④ 同③可得 p 决策属性值为 1，做出 a_{P-S} 决策，接受项目 p 为 imitability 高风险项目。

由以上结果得到 p 在 technical risk U_1 上的信息如表 5 所示。

表 5　　U_1 下的信息

指标	U_1				
	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	v_1
p_1	1	0	1	1	1
p_2	0	1	1	1	1
p_3	0	1	0	0	0
p_4	0	0	1	1	1
p_5	1	1	0	1	1
p_6	1	1	1	1	1
p_7	1	1	0	1	1
p_8	0	0	1	1	1
p	—	0	1	1	?

预投项目 p 与 p_i(i=1,2,3,⋯,8)在 U_1 的集对关联度矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.75+0.25i+0j \\ 0.5+0.25i+0.25j \\ 0+0.25i+0.75j \\ 0.75+0.25i+0j \\ 0.25+0.5i+0.25j \\ 0.5+0.25i+0.25j \\ 0.25+0.5i+0.25j \\ 0.75+0.25i+0j \end{bmatrix}$$

进而可得到在关系 U_1 下的集对信息粒

$$W'_{U_1}(p)=\frac{0.75+0.25i+0j}{p_1}+\frac{0.5+0.25i+0.25j}{p_2}+\frac{0+0.25i+0.75j}{p_3}+\frac{0.75+0.25i+0j}{p_4}+\frac{0.25+0.5i+0.25j}{p_5}+\frac{0.5+0.25i+0.25j}{p_6}+\frac{0.25+0.5i+0.25j}{p_7}+\frac{0.75+0.25i+0j}{p_8}。$$

设定正同度阈值与负反度阈值分别为 $\lambda=0.5$ 和 $\gamma=0.5$， 则由 $W'_{U_1}(p)$ 得到的 3 个域分别为 $S_{U_1}=\{p_1,p_2,p_4,p_6,p_8\}$，$O_{U_1}=\{p_3\}$，$U_{CU_1}=\{p_5,p_7\}$。此时，$S$ 域—最大正同度 $BPD_{U_1}=0.75$ 与 O 域—最大负反度 $BND_{U_1}=0.75$ 相等，且 $I_{U_1}=\{p_1,p_4,p_8\}$ 中对象的决策属性值均为 1， $D_{U_1}=\{p_3\}$ 中对象的决策属性值为 0，两者为对立关系，则得到 p 决策属性值为 1，做出 a_{P-S} 决策，即接受项目 p 为 technical risk 高风险项目。

6　结束语

在集对粒空间上构建三支决策模型，该决策是在已进行集对度量的基础上综合考虑正同粒度、负反粒度和差异粒度的情况进行的，即在决策时不仅仅考虑正效益，也会考虑负效益和不确定效益，并对其进行综合考虑。这样在三支决策中进行接受、拒绝或推迟决策时，更符合人们的决策实际。

参考文献：

[1] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180: 341-353.

[2] HU B Q. Three-way decisions space and three-way decisions[J]. Information Sciences, 2014, 281:21-52.

[3] YAO Y Y, DENG X F. Sequential three-way decisions with probabilistic rough sets[C]//10th IEEE International Conference on Cognitive Informatics and Cognitive Computing. 2011: 120-125.

[4] 刘盾，李天瑞，李华雄. 区间决策粗糙集[J]. 计算机科学，2012, 39(7): 178-181, 214.
LIU D, LI T R, LI H X. Inter-valued decision-theoretic rough sets[J]. Computer Science, 2012, 39(7): 178-181, 214.

[5] 刘盾，李天瑞，梁德翠. 模糊数决策粗糙集[J]. 计算机科学，2012, 39(12): 25-29.
LIU D, LI T R, LIANG D C. Fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Computer Science, 2012, 39(12): 25-29.

[6] 薛占熬，刘杰，朱泰隆，等. 基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型及其三支决策[J]. 计算机科学, 2016, 43(3): 285-290.
XUE Z A, LIU J, ZHU T L, et al. Measure rough set model based on covering and its three-way descision[J]. Computer Schema, 2016, 43(3): 285-290.

[7] Available online[EB/OL]: http://www2.cs.uregina.ca/~twd/.

[8] YAO Y Y. Three-way decisions and cognitive computing[J]. Cognitive Computation, 2016, doi: 10.1007/s12559 -016-9397-5.

[9] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]//6th International Conference on Rough Sets and KnowledgeTechnology. 2012: 1-16.

[10] 于洪，王国胤，李天瑞，等. 三支决策：复杂问题求解方法与实践[M]. 北京：科学出版社, 2015.
YU H, WANG G Y, LI T R, et al. Three decisions: a complex problem solving method and practice[M]. Beijing: Science Press, 2015.

[11] LIANG D, PEDRYCZ W, LIU D, et al. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets under linguistic assessment with the aid of group decision making[J]. Applied Soft Computing, 2015, 29: 256-269.

[12] LIANG D, LIU D. A novel risk decision-making based on decision-theoretic rough sets under hesitant fuzzy information[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23: 237-247.

[13] 张春英，刘保相. 基于 SPA 的不完备信息系统的双向 S-粗集模型[J]. 计算机应用研究, 2006, 11: 96-98.
ZHANG C Y, LIU B X. Two direction s-rough sets of incomplete information system based on SPA[J]. Application Research of Computers, 2006, 11: 96-98.

[14] 张斌. 不确定信息处理的集对论思想与方法[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(2): 89.
ZHANG B. The method and thought of set pair theory treated with uncertainties information[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2001, 15(2): 89.

[15] ZHANG C Y, LIU B X, WANG L Y. Model of set pair information granular computing[J]. International Journal of Computer Science and Knowledge Engineering,2016.

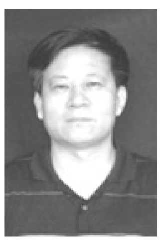
[16] 刘盾，梁德翠. 广义三支决策与狭义三支决策[J]. 计算机科学与探索, 2016(6): 1-9.
LIU D, LIANG D C. Generalized three-way decision and special three-way decisions[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2016(6): 1-9.

作者简介：

张春英（1969-），女，河北唐山人，博士，华北理工大学教授，主要研究方向为数据挖掘、概念格、社会网络。

王立亚（1987-），女，河北唐山人，华北理工大学讲师，主要研究方向为概念格、数据挖掘。

李明霞（1991-），女，河北保定人，华北理工大学硕士生，主要研究方向为概念格、数据挖掘。



刘保相（1957-），男，河北衡水人，华北理工大学教授，主要研究方向为概念格、数据挖掘、模糊控制。